

ŠTEFAN POLÁČIK, ANNA VELEBOVÁ

**MOŽNOSTI REGRESNEJ ANALÝZY A FOURIÉROVÝCH RADOV PRI ŠTÚDIU  
REŽIMU PODZEMNÝCH VÔD NA PRÍKLADE ČASTI  
VÝCHODOSLOVENSKEJ NÍŽINY**

Štefan Poláčik, Anna Velebová: Possibilities of Regression Analysis and Fourier Series in the Study of Underground Waters Regime on the Example of a Part of the East Slovakian Lowland. Geogr. Čas., 34, 1982, 3; 2 maps, 1 fig., 2 tables, 12 refs.

The contribution is aimed at a sample of the possibility of mathematical generalization of the regime of underground waters in a part of the East Slovakian Lowland by means of regression analysis and Fourier series. We have tried, by the regression analysis, to characterize the spatial aspects of underground water regime, and by Fourier series, in turn, to do its chronological features within a period of 10 years.

## ÚVOD

Výskum v geovedných disciplínach sa stále viac dostáva do polohy, v ktorej je potrebné spracovať veľké množstvo dát, a to často veľmi náročnými metódami na numerické operácie. Uvedené problémy je možné zvládnuť iba na samočinných počítačoch. Prezentované úlohy by bolo tiež iba veľmi ťažko možné riešiť bez počítača. Využili sme WANG 2200, inštalovaný v Geografickom ústave SAV.

V našom príspevku sa pokúsime ukázať dva spôsoby matematickej generalizácie režimu podzemných vôd, a to pomocou regresnej analýzy a časových radov.

## REGRESNÁ ANALÝZA PRI VÝSKUME REŽIMU PODZEMNÝCH VÔD

Najrozšírenejšou metódou, ktorou je možné stanoviť funkčnú väzbu medzi určitými závislými premennými veličinami, je regresná analýza. Uľahčuje a zjednodušuje sa ňou pohľad aj na rozsiahlejšie číselné súbory. Vo svetovej geologickej, hydrologickej alebo geografickej literatúre sa s jej využitím stretávame často. S metódou sa môže čitateľ oboznámiť v prístupnej literatúre.

Pomocou špeciálneho typu regresnej analýzy sa pokúsime opísať priestorové aspekty režimu podzemných vôd v južnej časti Východoslovenskej nížiny. Ide o územie medziriečia Bodrogu, Latorice a Tisy, ktoré predstavuje mladá poklesávajúca rovina s akumulárnym, eolicko-fluviálnym až fluviálnym reliéfom,

s horizontálnymi sedimentárnymi štruktúrami značnej mocnosti. Vrchnoneogénne štrky a piesky, ktoré tvoria podklad pre kvartérne sedimenty, predstavujú spolu často jeden hydrogeologický horizont s ťažko položitelnou stratigrafickou hranicou terciér—kvartér. Zvodnené prostredie tvoria najčastejšie dobre priepustné štrky a piesky s prepláskami ílov. V nadložnej vrstve sa na mnohých miestach nachádzajú menej priepustné povodňové kaly, hliny a ílovité sedimenty. Homogénnosť územia naruša iba prítomnosť lokálne vystupujúcich neovulkanických exotov (Kráľovské kopce, Tarbucka, Somotorská hora). Vcelku toto územie môžeme pokladať z hydrogeologického hľadiska za jednotné. Vo vývoji nášho záujmového územia sa výrazne uplatnila neotektonika. Celé územie poklesávalo pozdĺž zlomov SV—JZ, SZ—JV a S—J, ktorých hydrogeologická hodnota je však malá, sú stykovou plochou plastických hornín. Väčší význam môže mať iba stykové pásmo neovulkanitov s okolitými horninami. V procese utvárania režimu podzemných vôd tohto územia mali okrem hydrogeologických pomerov a tektoniky rozhodujúci vplyv režimy riek Bodrogu, Latorice a Tisy. Základ pre výskum regionálnych črt podzemných vôd tejto oblasti z hydrogeografického hľadiska položil A. Porubský (1958),<sup>1</sup> ktorý dnes ďalej prehĺbili už mnohí autori.

V skúmanej južnej časti Východoslovenskej nížiny sa použilo 30 staníc základnej pozorovacej siete HMÚ, ku ktorým boli dostupné týždenné údaje o výške hladiny podzemnej vody za roky 1969—1978. Hladina podzemnej vody v určitom bode skúmaného priestoru závisí od mnohých režimotvorných faktorov. Príjmem však predpoklad, že sa v nej odrážajú režimy vodných stavov v riekach Bodrogu, Latorice, Tisy, ale aj vzdialenosti daného pozorovacieho objektu hladiny podzemnej vody od týchto riek. Polohu týchto bodov (implicitne i vzdialeností) je možné charakterizovať súradnicami v štvorcovej súradnicovej sústave. Regresná funkcia, ktorá vie charakterizovať hladiny podzemnej vody v ľubovoľnom bode skúmanej oblasti so súradnicami  $U, V$ , má tvar

$$HPV_{U,V} = A_0 + A_1 VSB + A_2 VSL + A_3 VST + A_4 U + A_5 V + A_6 UV + A_7 U^2 + A_8 V^2, \quad (1)$$

$HPV_{U,V}$  — hladina podzemnej vody v bode  $U, V$ ,

$VSB$  — vodný stav v Bodrogu (vodočet Streda nad Bodrogom),

$VSL$  — vodný stav v Latorici (vodočet Veľké Kapušany),

$VST$  — vodný stav v Tise (vodočet Záhony),

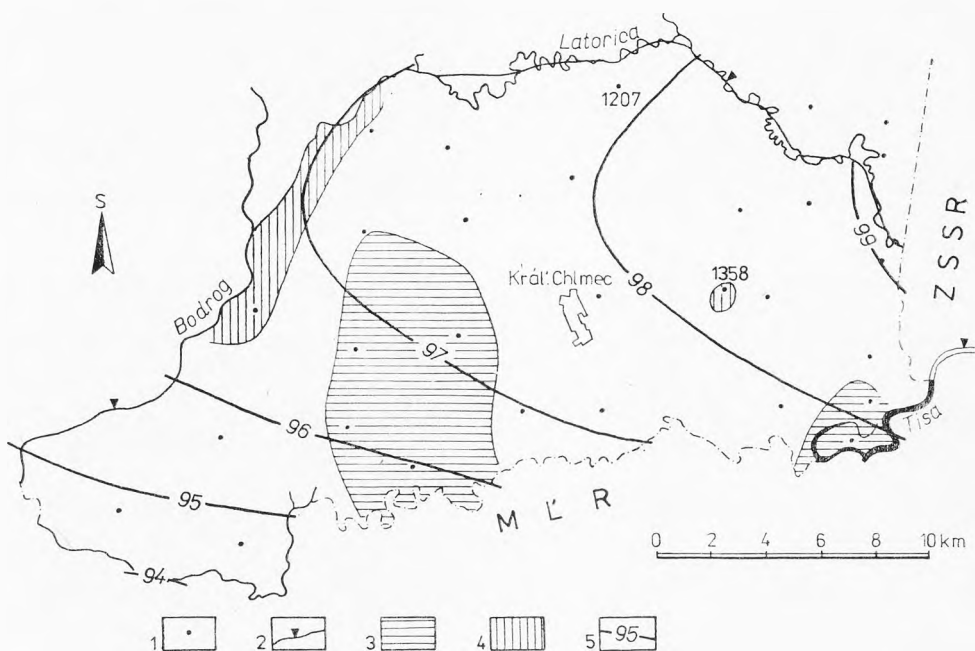
$A_0—A_8$  — konštanty.

Obdobný typ funkcie, zložený výlučne z funkčných komponentov polohy, v literatúre sa nazýva funkciou plošného trendu a tento typ regresnej analýzy má špecifický názov — analýza plošných trendov (trend surface analysis). Metóda sa vyvinula v geofyzike a geológii (F. Grant 1957, W. C. Krumbein 1956, W. C. Krumbein, F. A. Graybill 1965, R. L. Miller, J. S. Kahn 1962). Použila sa aj v geografii (R. J. Chorley, P. Haggett 1965, E. Vowinckel 1967). V domácej literatúre sa táto metóda využila v práci Š. Poláčika [v tlači] a konkrétne pre konštrukciu generalizovaných izolínií hladiny podzemnej vody ju odporú-

<sup>1</sup> Dovoľujeme si poďakovať RNDr. A. Porubskému, CSc. za mnohé konzultácie k študovaným problémom.



520 stavov. Mapy sa získali dosadzovaním konkrétnych hodnôt vodných stavov Bodrogu, Latorice, Tisy a menením súradníc  $U, V$  v rovnici (2). Obdobným spôsobom je možné získať mapy hladiny podzemnej vody za ďalších 518 stavov, ale aj za ďalších potenciálne možných stavov, čo možno využiť tiež pri prognóze hladiny podzemnej vody. Mapy ukazujú generalizovanou formou, že sklon hladiny podzemnej vody (vyjadrená v m. n. m.) je zo SV na JZ a rozdiely medzi najvyšším a najnižším bodom za minimálnych a maximálnych stavov by podľa predikcie mali byť rovnaké (asi 5 m). Hladina podzemnej vody v oblasti by mala byť podľa modelu pri minimálnych vodných stavoch Bodrogu, Latorice a Tisy o viac ako 1 m nižšia ako pri maximálnych stavoch. Ak chceme priestorové aspekty hladiny podzemnej vody spoznať lepšie, nemôžeme sa obmedziť iba na hodnoty produkované bezprostredne modelom (2). Analýze musíme podrobiť tiež rezíduá, t. j. rozdiely medzi skutočnými a predikovanými hodnotami. Na mapách A, B sú rezíduá premietnuté do regionálnej roviny formou lineárnej interpolácie. Zobrazené sú však iba tie rezíduá, kde rozdiel medzi skutočnou a modelom predikovanou hodnotou výšky hladiny podzemnej vody je väčší ako 1 m. Naše výsledky sa pokúsime skonfrontovať s doterajšími poznatkami a prírodnými pomermi skúmaného územia, prípadne ich doplniť. Na



Mapa B. Nadmorská výška hladiny podzemnej vody pri maximálnych vodných stavoch v riekach Bodrog, Latorica a Tisa. 1 — pozorovací objekt hladiny podzemnej vody, 2 — vodočet, 3 — rozdiely medzi skutočnou a modelom predikovanou hodnotou výšky hladiny podzemnej vody (rezíduá) sú väčšie ako  $-1$  m, 4 — rozdiely medzi skutočnou a modelom predikovanou hodnotou výšky hladiny podzemnej vody (rezíduá) sú väčšie ako  $+1$  m, 5 — izočiary výšky hladiny podzemnej vody v m. n. m.

obidvoch mapách markantne vystupuje areál záporných rezíduí v centrálnej časti skúmaného územia. Ide o územie západne od Kráľovských kopcov, ktoré predstavuje agradovaná rovina s častými pieskovými pokrovmi a dunami, kde priemerná hladina podzemnej vody sa nachádza blízko pod povrchom terénu (1—1,5 m) a jej rozkolísanosť v ročnom chode je vzhľadom na pririečne územie skúmanej oblasti pomerne malá. Vplyvom výstupu neovulkanitov Kráľovských kopcov, ktoré pôsobia ako určitá relatívne nepriepustná prekážka, narúšajúca generálny smer prúdenia podzemných vôd zo SV na JZ, môžeme vysvetliť ten fakt, že nimi ovplyvnená hladina podzemnej vody je v skutočnosti nižšia ako hodnota priradená modelom. V pririečnej zóne Tisy by podzemná voda mala byť podľa získaných výsledkov za maximálnej i minimálnej sumy vodných stavov odčerpávaná riekou (mapy A, B). Z analýzy ďalších stavov sme zistili, že iba za maximálneho vodného stavu na Tise podzemné vody v jej pririečnej zóne dopĺňa rieka. Hlbšie poznanie režimu odvádzania a dopĺňania zásob podzemných vôd v tejto oblasti by sme získali porovnaním našich výsledkov s poznatkami o režime podzemných vôd na území za čs. štátnou hranicou. My predpokladáme, že na režim podzemnej vody v tejto depresnej oblasti recentných agradačných valov s poklesávajúcou tendenciou, s pomerne hlboko ležiacou hladinou podzemnej vody pod terénom (v priemere 4,5—5,5 m) majú vplyv podzemné vody šíriace sa z Čopsko-minajskej depresie a drénujúce účinky Tisy.

Pririečna zóna Latorice predstavuje pomerne úzky pás územia s výrazným vplyvom tejto rieky. Za minimálnych vodných stavov na Latorici môžeme najmä v pririečnej zóne Lelesko-dobranskej depresie sledovať výrazný drénujúci účinok Latorice, čo potvrdzujú aj výsledky, ktoré sme získali. Na mape A je znázornený región so zápornými rezíduami vyššími ako 1 m v pririečnej zóne Latorice smerom na V od pozorovacej stanice 1207, čím je vyjadrené, že za minimálnej sumy vodných stavov podzemnú vodu v týchto miestach výrazne drénuje rieka alebo hlbšie horizonty. Za maximálnych prietokov na Latorici sa, naopak, dopĺňajú zásoby podzemných vôd na celom úseku pririečnej zóny. V pririečnej zóne približne od ústia Laborca do Latorice smerom po toku sa režim hladiny podzemnej vody mení, a to v priebehu roka v úzkej závislosti od hladiny vody v rieke. V čase maximálnych vodných stavov na Latorici rieka výrazne dopĺňa zásoby podzemných vôd. K zhodným výsledkom sme sa dopracovali aj v našej analýze. Na mape B je vyznačený región s kladnými rezíduami v pririečnej zóne, a to približne od ústia Laborca až pod ústie Ondavy do Latorice, čo značí, že v tejto oblasti nám rieka za maximálnej sumy vodných stavov infiltruje do okolitého územia a zvyšuje zásoby podzemných vôd.

Podobná situácia je tiež pozdĺž Bodrogu, od ústia Ondavy, kde brehová infiltrácia sa uplatňuje za maximálnych vodných stavov, za ostatných stavov podzemné vody drénuje recipient. Celkové zvodnenie tejto oblasti je však menšie, čo súvisí s pribúdaním ílovitých frakcií v štrkopieskoch sa znižujúcou sa priepustnosťou.

Na obidvoch mapách je v okolí vrtu 1358 región s kladnými rezíduami. Tento fakt nemôžeme interpretovať na základe prírodných daností, pretože je zapríčinený tým, že ide o hlbší vrt s napätou hladinou, ktorej režim má iné zákonitosti. Narúša nám celkovú štruktúru a v tomto prípade je prirodzené, že model zle predikuje hladinu podzemnej vody k tomuto bodu pre všetky analyzované situácie.

Metóda sa používa na matematický opis periodicky sa meniacich procesov alebo opakujúcich sa javov. Poskytuje široké aplikačné možnosti, a preto sa často využíva v geofyzike [N. F. Barber 1966], v geológii [J. W. Harbaugh, F. W. Preston 1966], ale aj v hydroológii. Podobne ako v regresnej analýze, aj v tejto metóde je cieľom „vtesnať“ určitý súbor dát do jedinej funkcie. Je to však podstatne zložitejšia funkcia. Jej funkčné komponenty sú trigonometrickými funkciami  $\sin$  a  $\cos$ . Matematický zápis Fouriérovho radu  $M$ -stupňa je takýto:

$$Z(\alpha) = \sum_{k=0}^M \{a_k \sin k\alpha + b_k \cos k\alpha\}, \text{ kde} \quad (3)$$

$\alpha$  — uhol meniaci sa v intervale  $0-2\pi$ .

Konštanty  $a_k, b_k$  sa vypočítajú podľa vzťahov (4) — (6),

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N y_j \cos k\alpha_j, \quad (4)$$

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N y_j \sin k\alpha_j, \quad (5)$$

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j; \quad b_0 = 0, \quad (6)$$

$N$  — počet bodov analyzovaného súboru (v našom prípade 520 časových súborov),

$\alpha_j$  — uhol (radián) odpovedajúci  $j$ -temu bodu zo súboru na osi  $x$  (priemet do intervalu  $0-2\pi$ ),

$y_j$  — hodnota odpovedajúca  $\alpha_j$  na osi  $y$ .

Podrobnosti o algoritme výpočtu so zreteľom na počítačové riešenie sú uvedené v práci A. Ralston (1978). Po vypočítaní základného modelu (3) je výhodné vypočítat tiež tzv. spektrum stupňa radu —  $SR_k$  podľa (7):

$$SR_k = a_k^2 + b_k^2. \quad (7)$$

Kvalitu funkcie charakterizuje rozptyl ( $V$ ), ktorý táto reprodukuje z celkového rozptylu základného súboru. Vypočíta sa podľa

$$V = 1 - \frac{\text{rozptyl rezíduí}}{\text{celkový rozptyl}} = 1 - \frac{\sum_{j=1}^N (y_j - Z(\alpha_j))^2}{\sum_{j=1}^N (y_j - a_0)^2}, \quad (8)$$

Pomocou týchto kritérií vieme stanoviť, ktorý stupeň radu je dostatočný pre reprodukciu základných dát.

V tejto časti práce sme sa zamerali na cieľ ukázať, ako sa javí režim podzemnej vody v lokalite 1207 (lokalizovaná neďaleko od Latorice) a porovnať ho s režimom v tokoch Bodrog, Latorica a Tisa. V úvode sme posunili os  $x$

Tab. 1. Hodnoty konštant  $a_k$ ,  $b_k$  a spektra stupňa radu

k	$a_k$ (koef. pri sin)	$b_k$ (koef. pri cos)	$SR_k$
0	378,5	0,0	143 263,7
1	23,8	-23,8	1 134,8
2	-21,8	33,1	1 572,4
3	-1,1	-26,1	682,9
4	-12,9	-0,7	169,3
5	36,6	6,4	1 382,5
6	-1,9	-6,9	51,4
7	7,4	7,1	105,5
8	7,4	-9,8	152,4
9	-24,6	-3,4	621,2
10	-51,3	11,1	2 760,4
11	-11,6	-8,3	205,2
12	13,2	-4,5	195,4
13	9,0	-11,8	223,4
14	-10,0	-2,7	107,9
15	-6,4	9,5	132,8
16	-4,3	1,1	20,3
17	4,3	4,0	35,8
18	2,1	-3,6	17,8
19	4,3	0,4	19,1
20	8,0	1,5	67,6

(z dôvodu upresnenia kalkulácií) do takej polohy, aby pretínala bod absolútneho minima vodných stavov v riekach a hladiny podzemnej vody v lokalite (1207 (t. j. do nadmorskej výšky 93,8 m). Všetky výpočty sa potom urobili z dát v cm nad touto úrovňou. Fourierove rady sa v 1. fáze počítali pre  $M = 20$ . Ukázalo sa, že na reprodukciu dát stanice 1207 stačí rad s  $M = 10$ , kde  $V = 79,61$ . Rad stupňa 10 sa vybral na základe lokálneho maxima v postupnosti  $SR_k$  a logicky odpovedá 10-ročnému obdobiu, z ktorého sú dáta. Fourierov rad charakterizuje tab. 1.

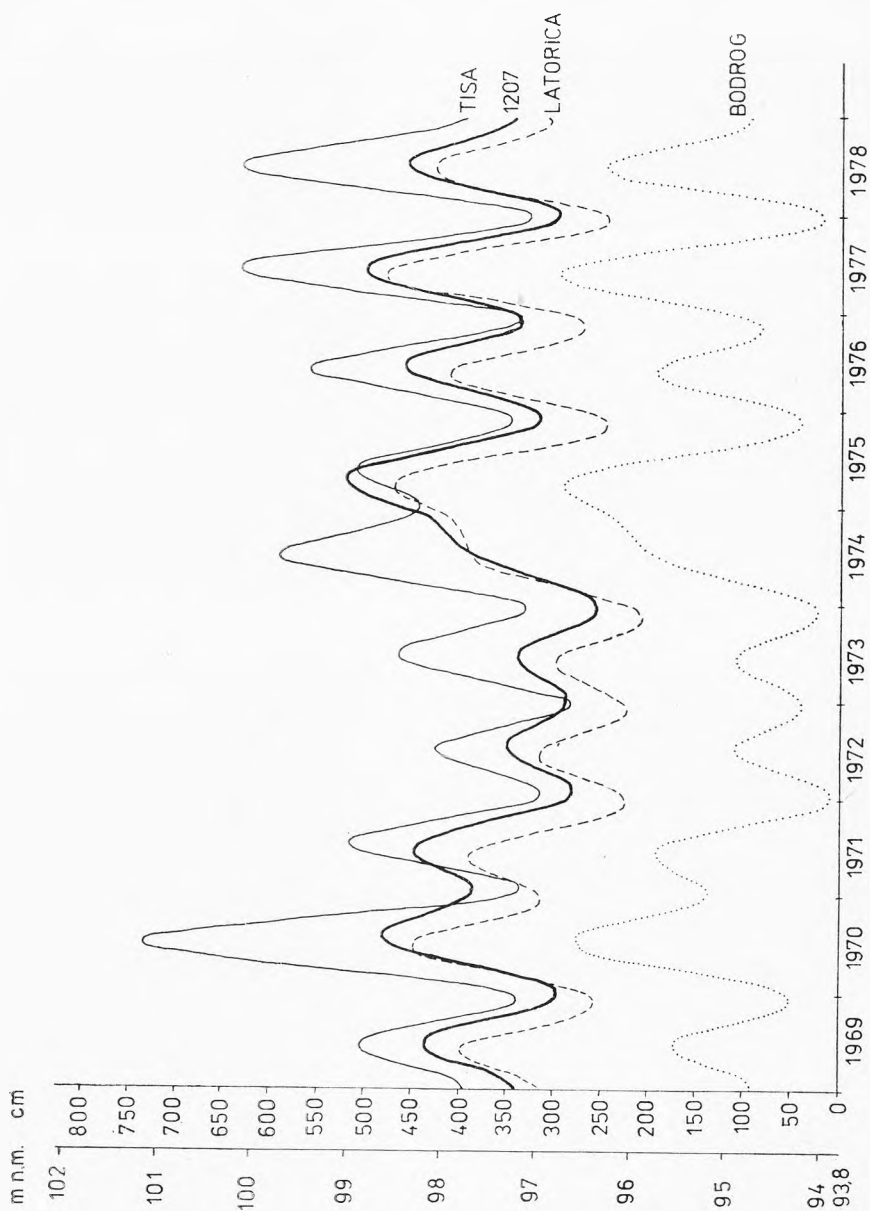
Vypočítali sa tiež Fourierove rady pre vodné stavy na riekach Bodrogu, Latorice a Tisy. Pre  $M = 10$  mali v postupnosti  $SR_k$  všetky rieky lokálne maximum. Na obr. 1 sú znázornené ich teoretické hodnoty. Reprodukovaný rozptyl

Tab. 2. Reprodukovaný rozptyl Fourierovým radom

Stanica	$M$	Rozptyl (%)
1207	10	79,61
Bodrog	10	37,19
Bodrog	38	63,57
Latorica	10	36,67
Latorica	38	61,79
Tisa	10	57,59
Tisa	38	61,41

je však malý. Porovnateľný rozptyl so stanicou 1207 sme nedosiahli ani zvýšením stupňa Fouriérovho radu na  $M = 40$ , kde nastalo lokálne maximum  $SR_k$  pri  $k = 38$  (tab. 2).

Z uvedeného je zrejmé, že rieky majú z chronologického hľadiska podstatne komplikovanejší režim ako podzemné vody. Z postupnosti  $SR_k$  môžeme odhad-



Obr. 1. Teoretické hodnoty vodných stavov a hladiny podzemnej vody vypočítané pomocou Fouriérových radov.



núť, koľkými periódami by bolo možné charakterizovať režim podzemnej vody. Z tabuľky 1 vidieť, že lokálne maximá sú v postupnosti  $SR_k$  pre  $k = 2, 5, 10$ . Hladina podzemnej vody v stanici 1207 teda výraznejšie kolíše v 5, 2 a 1-ročných cykloch. Pre rieky Bodrog, Latorica a Tisa sa zistili maximá v postupnosti  $SR_k$  spoločne pre  $k = 5, 10, 12, 22, 32, 38$ . Ako vidieť z obr. 1, hladina podzemnej vody v stanici 1207 sleduje hladinu rieky Latorice. Funkčné hodnoty, ktoré poskytuje Fouriérov rad na osi  $y$ , sú však v tejto stanici vyššie ako hladina v rieke. Možno teda vysloviť tvrdenie, že rieka Latorica väčšinu času odčerpáva podzemnú vodu z oblasti stanice 1207. Ďalšiu informáciu o režime podzemnej i povrchovej vody môžeme získať matematickou analýzou Fouriérovho radu. Keďže táto funkcia je spojitá na intervale  $\{0, 2\pi\}$ , možno ju derivovať (hľadať presné miesta lokálnych extrémov, analyzovať konvexnosť alebo konkrávnosť), integrovať, porovnávať s inými spojitými funkciami atď.

## ZÁVER

V príspevku sme sa usilovali ukázať dva spôsoby matematickej generalizácie režimu podzemných vôd v časti Východoslovenskej nížiny, a to regresnou analýzou a analýzou Fouriérových radov. Prvá z nich dáva možnosť skúmať priestorové aspekty režimu podzemných vôd, druhá zasa poskytuje možnosť charakterizovať režim podzemnej vody v čase formou jedného matematického zápisu. Obidve metódy nám poskytujú nový prístup k poznaniu hladiny podzemnej vody a k prognóze jej režimu. Naše výsledky nie sú v rozpore s doterajšími poznatkami o režime podzemných vôd tejto oblasti, ba naopak, potvrdzujú ich a dopĺňajú o nové spôsoby vyjadrenia.

## LITERATÚRA

1. BERBER, N. F.: Fourier methods in geophysics. In: *Methods and techniques in geophysics*, ed. S. K. Runcorn: John Wiley and sons, 2, New York 1966. — 2. GRANT, F.: A problem in the analysis of geophysical data. *Geophysica*, 22, 1957. — 3. HARBAUGH, J. W., PRESTON, F. W.: Fourier series analysis in geology. *Univ. Arizona, Coll. Mines*, 1, 1965. — 4. CHORLEY, R. J., HAGGETT, P.: Trend Surface mapping in *Geographical Research. Transactions and Papers of the Institute of British Geographers*, 37, 1965. — 5. JETEL, J.: Mapy filtračných parametrov a potenciální produktivity. V. hydrogeologická konferencia, Gottwaldov 1970. — 6. KRUMBEIN, W. C.: Regional and local components in facies maps. *Bull. of the Am. of Petroleum Geologists*, 40, 2, 1956. — 7. KRUMBEIN, W. C., GRAYBILL, F. A.: *An introduction to statistical models in geology*. Mc Graw-Hill B. C., New York—Toronto—London 1965. — 8. MILLER, R. L., KAHN, J. S.: *Statistical analysis in the geological sciences*. J. Wiley and sons. New York—London 1962. — 9. POLÁČIK, Š.: Analýza povrchových trendov. Štúdium zamestnanosti v hlavných odvetviach národného hospodárstva na Slovensku v rokoch 1961—1970. *Studia geographica*, 74, Brno (v tlači). — 10. PORUBSKÝ, A.: Hydrogeologické pomery Východoslovenskej nížiny. Zborník ÚGS, Žilina 1958.

11. RALSTON, A.: *Základy numerickej matematiky*. Academia, Praha 1978. — 12. VOWINCKEL, E.: *Evaporation on the Canadian Prairies*. Arctic Meteorology Research Group, Publication in Meteorology, 88, Mc Gill University, Montreal 1967.

ВОЗМОЖНОСТИ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА И РЯДОВ ФУРЬЕ  
ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ РЕЖИМА ПОДЗЕМНЫХ ВОД НА ПРИМЕРЕ ЧАСТИ  
ВОСТОЧНОСЛОВАЦКОЙ НИЗМЕННОСТИ

В данной статье мы стремились обратить внимание на два способа математической генерализации режима подземных вод в южной части Восточнословацкой низменности. Исследуемый район представляет собой междуречье Бодрога, Латорицы и Тиссы, являющееся молодой опускающейся равниной с аккумуляционным золово-флювиальным и флювиальным рельефом с горизонтальными осадочными структурами значительной мощности, местами прерванными неовулканическими останцами. На территории наблюдается специфический режим подземных вод, сформировавшийся в результате местных гидрологических условий, тектоники и под влиянием рек Бодрога, Латорицы и Тиссы.

В первой части статьи посредством специального типа регрессионного анализа мы стремились получить описание пространственных аспектов режима подземных вод. В этих целях нами использованы данные 30 станций основной наблюдательной сети, для которых имелись в наличии еженедельные данные о высоте уровня подземных вод за период с 1969 по 1978 год. Высота уровня подземной воды в конкретном пункте исследуемой территории зависит от множества режимообразующих факторов. Мы исходили из предположения, что высота уровня подземной воды зависит от уровня воды в реках Бодрог, Латорица и Тисса, а также от расстояния наблюдаемого пункта от этих рек. Положение этих пунктов (одновременно также их расстояние) можно определить при помощи координат в квадратной координатной системе. Регрессионная функция, которая способна давать характеристику уровня подземных вод в любом пункте изучаемого района с координатами  $U, V$ , имеет вид:

$$HPV_{U, V} = A_0 + A_1 VSB + A_2 VSL + A_3 VST + A_4 U + A_5 V + A_6 UV + A_7 U^2 + A_8 V^2, \quad (1)$$

где:  $HPV_{U, V}$  — уровень подземной воды в пункте  $U, V$ ,  
 $VSB$  — уровень воды в р. Бодрог (футшток Стреда над Бодрогом),  
 $VSL$  — уровень воды в р. Латорица (футшток Вельке Капушаны),  
 $VST$  — уровень воды в р. Тисса (футшток Загоны),  
 $A_0 - A_8$  — постоянные.

Этот тип регрессионного анализа имеет в литературе специфическое название — анализ площадных трендов. Постоянные в уравнении (1) получаются по методу наименьших квадратов. В результате регрессионная функция принимает вид:

$$HPV_{U, V} = 74,08 + 0,197 VSB - 0,012 VSL + 0,016 VST + 0,028 U + 0,205 V + 0,0002 UV - 0,0036 U^2 + 0,0002 V^2. \quad (2)$$

На картах  $A, B$  изображены гидроизогипсы для двух экстремальных состояний уровня, вычисленные изо всех 520 данных об уровне воды. Карты получены путем подставки конкретных значений уровня рек Бодрога, Латорицы и Тиссы, причем соответственно изменялись координаты  $U, V$  в уравнении (2). Аналогичным путем можно получить карты уровней подземной воды по остальным 518 данным, а также и других потенциально возможных уровней, что можно использовать при прогнозировании уровня подземных вод. Если мы желаем ознакомиться с пространственными аспектами уровня подземной воды получше, нам необходимо проанализировать также остаточные величины (резидуумы), т. е. разницы между теоретическими и действительными значениями.

Путем анализа рядов Фурье мы стремились охарактеризовать хронологические черты режима подземной воды на участке 1207 в течение 10-летнего периода, в целях его сравнения с режимом воды в реках Бодрог, Латорица и Тисса. Математическая запись ряда Фурье  $M$ -ой степени представлена в виде:

$$Z(\alpha) = \sum_{k=0}^M (a_k \sin k\alpha + b_k \cos k\alpha) \quad (3)$$

где:  $\alpha$  — угол принимающий значения от 0 до  $2\pi$ ,  
 $a_k, b_k$  — постоянные.

При помощи критерия  $SR_k$  (спектр степени ряда) и величины  $V$  (рассеивание), можно определить степень ряда, которая является достаточной для воспроизведения основных данных. Оказалось, что для станции 1207 достаточно применение ряда с  $M = 10$ , но для воспроизведения данных об уровне рек нам необходимо повысить степень ряда до  $M = 40$ . В свою очередь это свидетельствует о том, что с хронологического аспекта реки имеют более изменчивый режим чем подземные воды.

Карта А. Абсолютная высота уровня подземной воды при минимальных уровнях воды в реках Бодрог, Латорица и Тисса.

1 — пункт наблюдения за уровнем подземной воды, 2 — футшток, 3 — разницы между действительной и посредством модели предсказанной высотой уровня подземной воды (резидуумы) превышают значение  $-1$  м, 4 — разницы между действительной и посредством модели предсказанной высотой уровня подземной воды (резидуумы) превышают значение  $+1$  м, 5 — изолинии высоты уровня подземной воды в метрах над уровнем моря.

Карта В. Абсолютная высота уровня подземной воды при максимальных уровнях воды в реках Бодрог, Латорица и Тисса.

1 — пункт наблюдения за уровнем подземной воды, 2 — футшток, 3 — разницы между действительной и посредством модели предсказанной высотой уровня подземной воды (резидуумы) превышают значение  $-1$  м, 4 — разницы между действительной и посредством модели предсказанной высотой уровня подземной воды (резидуумы) превышают значение  $+1$  м, 5 — изолинии высоты уровня подземной воды в метрах над уровнем моря.

Рис. 1. Теоретические значения уровней воды в реках и уровней подземной воды, вычисленные при помощи рядов Фурье.

Табл. 1. Значение постоянных  $a_k, b_k$  и спектра степени ряда.

Табл. 2. Воспроизведенное рассеивание при помощи ряда Фурье.

Перевод: Л. Правдова

Štefan Poláček, Anna Velebová

## POSSIBILITIES OF REGRESSION ANALYSIS AND FOURIER SERIES IN THE STUDY OF UNDERGROUND WATERS REGIME ON THE EXAMPLE OF A PART OF THE EAST SLOVAKIAN LOWLAND

In this contribution we have tried to show two ways of the mathematic generalization of underground waters regime in southern part of the East Slovakian Lowland. The area of interest is represented by the land between the Bodrog, Latorica and Tisa as a young subsiding plain with accumulational eolian-fluvial to fluvial relief, with

horizontal sedimentary structures of a considerable thickness, being locally interrupted by neovolcanic exots. The territory has got a specific regime of underground waters, which has been formed under the influence of local hydrogeological conditions, tectonics and also under the influence of the rivers Bodrog, Latorica and Tisa.

In the first part we tried to describe the spatial aspects of underground waters regime by means of a special type of regression analysis. For this purpose we used 30 stations of the basic observation network with weekly data of the heights of underground water level available for 1969—1978. The level of underground water to a point of the space investigated depends on many regime-forming factors. We have, however, accepted a presupposition that both the regimes of the Bodrog, Latorica and Tisa water stages reflect in it, and also the distances between these rivers and the observing point. The position of these points (implicitly also the distances) may be characterized by coordinates in the square coordinate system. The regression function, which is able to characterize the level of underground water in any point of the area investigated with coordinates  $U, V$  has the following form:

$$HPV_{U,V} = A_0 + A_1 VSB + A_2 VSL + A_3 VST + A_4 U + A_5 V + A_6 UV + A_7 U^2 + A_8 V^2 \quad (1)$$

$HPV_{U,V}$  — level of underground water in point  $U, V$

$VSB$  — gauge height of the Bodrog (water gauge at Streda nad Bodrogom).

$VSL$  — gauge height of the Latorica (water gauge at Velké Kapušany),

$VST$  — gauge height of the Tisa (water gauge at Záhony),

$A_0 - A_8$  — constants.

This type of regression analysis has got a specific name in the literature, namely a trend surface analysis. The constants in the equation (1) are gained by the method of least squares. Thus, the resulting regression function has a form as follows:

$$HPV_{U,V} = 74.08 + 0.197 VSB - 0.012 VSL + 0.016 VST + 0.028 U + 0.205 V + 0.0002 UV - 0.0036 U^2 + 0.0002 V^2 \quad (2)$$

On Maps A, B hydroisohypses are represented for two extreme heights calculated from all the 520 heights. The maps have been gained by substituting concrete values of the gauge heights of the rivers Bodrog, Latorica, Tisa and by changing coordinates  $U, V$  in equation (2). In an analogical way we can gain the maps of the level of underground water for the other 518 gauge heights, but also for further potential heights, which can be utilized also in the prognosis of underground water level. If we want better recognize the spatial aspects of underground water level, we have to put also residues to an analysis, i. e. the differences between actual and theoretical values.

By an analysis of Fourier series we have tried to characterize the chronological features of underground water regime in locality 1207 for a 10-yearly period and to compare it to the regime in the streams Bodrog, Latorica and Tisa. The mathematical form of Fourier series of degree  $M$  is then:

$$Z(\alpha) = \sum_{k=0}^M [a_k \sin k\alpha + b_k \cos k\alpha] \quad (3)$$

$\alpha$  — angle ranging within the interval  $0 - 2\pi$ ,

$a_k, b_k$  — constants.

By means of criterion  $SR_k$  (spectrum of the degree of the series) and (V dispersion) we are able to assign, which of the series degree is sufficient to the reproduction of basic data. It became apparent that as to station 1207 a series with  $M = 10$  is sufficient and as to the reproduction of gauge heights data of the rivers it is necessary to increase the degree of Fourier series to  $M = 40$ , which means, in turn, that from the chronological viewpoint the rivers have got a more variable regime than the underground waters.

Map A. Underground water level above sea at minimum gauge heights in the rivers Bodrog, Latorica, and Tisa. 1 — observation object of underground water level, 2 — water gauge, 3 — differences between actual and by model predicted value of the height of underground water level (residues) exceed  $-1$  metre, 4 — differences between actual and by model predicted value of the height of underground water level (residues) exceed  $+1$  metre, 5 — isolines of the height of underground water level in metres above sea level.

Map B. Underground water level above sea level at maximum gauge heights in the rivers Bodrog, Latorica, and Tisa. 1 — observation object of underground water level, 2 — water gauge, 3 — differences between actual and by model predicted value of the height of underground water level (residues) exceed  $-1$  metre, 4 — differences between actual and by model predicted value of the height of underground water level (residues) exceed  $+1$  metre, 5 — isolines of the height of underground water level in metres above sea level.

Fig. 1. Theoretical values of gauge heights and underground water level calculated by means of Fourier series.

Table 1. Values of constants  $a_k$ ,  $b_k$  and those of the spectrum of the series degree.

Table 2. Dispersion reproduced by Fourier series.

Translated by A. Krajčír